

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PLANILHA PARA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS COM TROCA
DE CALOR E ATRITO

Bruno Jacob Perina

São Paulo
2011

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PLANILHA PARA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS COM TROCA
DE CALOR E ATRITO

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em
Engenharia.

Bruno Jacob Perina

Orientador: Marcos de Mattos Pimenta

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família, em especial aos meus pais, que sempre me deram ótimas condições de vida e de estudo, o que me possibilitou chegar aqui onde hoje estou.

Agradeço também a todos amigos que fiz nestes 5 anos de faculdade. Agradeço aos velhos e bons amigos, que fizeram com que o Biênio fosse uma das melhores fases da faculdade. Agradeço aos amigos sofredores da mecânica, por todas as noites mal dormidas. Agradeço aos amigos do CAM, que fizeram com que a faculdade não fosse apenas mais um local de estudo.

Em relação a este trabalho, agradeço ao meu orientador, Pimenta, e aos amigos Santos, Slava e Diego, por todas as ajudas concedidas.

E por fim, agradeço a Deus, pela proteção e força durante todos estes anos.

RESUMO

O presente projeto visa a criação de um software/planilha para solução de problemas dentro do escopo de escoamentos com troca de calor e atrito. O objetivo da planilha é que se possa entrar com todos os dados iniciais de um fluido em um escoamento, e seja possível encontrar todas as propriedades do fluido em qualquer seção a frente da inicial. Foi feita uma análise em cima dos escoamentos generalizados, posteriormente reduzida para uma análise apenas das variações dos potenciais de troca de calor e atrito. Com a equação diferencial da variação do número de Mach no escoamento, pode-se integrá-la e posteriormente usar as chamadas equações integrais para o cálculo de todas propriedades do fluido. O resultado foi uma ferramenta simples, de fácil uso e grande utilidade em problemas como os estudados neste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Escoamento em um duto	11
Figura 2 - Escoamento entre duas seções.....	17
Figura 3 - Ilustração da iteração básica do Método de Runge-Kutta 4.....	26
Figura 4 - Definição de parâmetros iniciais	27
Figura 5 - Criação da tabela e cálculo de K1	28
Figura 6 - Cálculo de K2.....	29
Figura 7 - Cálculo de K3.....	29
Figura 8 - Cálculo de K4.....	30
Figura 9 - Terminada primeira etapa da iteração	30
Figura 10 - Iterações e comparação de resultados	31
Figura 11 - Exemplo de como o passo aparecerá na planilha.....	33
Figura 12 - Exemplo de preenchimento dos Dados do Escoamento.....	34
Figura 13 - Botão para acionar os cálculos da planilha	34
Figura 14 - Exemplo do cálculo das propriedades para um caso de temperatura de parede constante.....	35
Figura 15 - Exemplo do cálculo das propriedades para um caso de fluxo de calor constante.....	35
Figura 16 - Exemplo de gráficos plotados para um caso de fluxo de calor constante	36
Figura 17 - Exemplo de gráficos plotados para um caso de temperatura de parede constante.....	36
Figura 18 - Dados de entrada do exemplo	37
Figura 19 - Gráficos das relações das propriedades.....	38
Figura 20 - Gráficos do valor das propriedades ao longo do escoamento	39
Figura 21 - Dados de entrada do exemplo	40
Figura 22 - Gráficos das relações das propriedades.....	41
Figura 23 - Gráficos do valor das propriedades ao longo do escoamento	42
Figura 24 - Dados de entrada do exemplo	43
Figura 25 - Variação do número de Mach	43
Figura 26 - Variação da temperatura de estagnação	44
Figura 27 - Variação da temperatura.....	44
Figura 28 - Variação da entropia.....	45

1	INTRODUÇÃO	7
2	METODOLOGIA	8
3	DETALHAMENTO DO CRONOGRAMA.....	9
4	ESCOAMENTOS GENERALIZADOS	11
4.1	Equacionamento	11
4.2	Coeficientes de Influência	15
4.3	Equações Integrais.....	16
5	ESCOAMENTO EM UM TROCADOR DE CALOR COM ATRITO	19
5.1	Caso de temperatura de parede constante.....	20
5.2	Caso de fluxo de calor constante	21
6	COEFICIENTE DE ATRITO VARIÁVEL	23
7	ESCOAMENTO COM PONTO SÔNICO PRESENTE	24
8	MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	25
8.1	Runge-Kutta de 4ª Ordem	25
8.2	Implementação do método na planilha.....	27
9	FUNCIONAMENTO DA PLANILHA.....	32
9.1	Entradas	32
9.1.1	Integração.....	32
9.1.2	Dados do escoamento.....	33
9.1.3	Botão calcular.....	34
9.2	Cálculos	35
9.3	Gráficos	36
10	EXEMPLOS.....	37
10.1	Caso com temperatura de parede constante.....	37
10.2	Caso com fluxo de calor constante	40
10.3	Caso onde Mach atinge a unidade	43
11	CONCLUSÕES	46
	ANEXO A – Tabela de Coeficientes de Influência	48
	ANEXO B – Programa VBA usado na planilha	49
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

1 INTRODUÇÃO

Grande parte dos sistemas térmicos e hidráulicos empregam fluidos compressíveis, tanto líquidos, como gases, como substâncias de trabalho. Para se entender melhor o funcionamento destes sistemas, o escoamento em suas tubulações é muito estudado.

O método mais didático usado nos cursos para o estudo destes escoamentos usa o conceito de escoamento simples, onde apenas um potencial do fluido é responsável por todas as suas mudanças de propriedades, como por exemplo escoamento isoentrópico com mudança de área da tubulação, com atrito e sem troca de calor (Fanno), diabático reversível (Rayleigh), entre outros. Para os fluidos considerados perfeitos em escoamentos simples, os problemas podem ser facilmente resolvidos de forma fechada. Já quando considerados reais, métodos numéricos simples são suficiente para a solução.

Porém, a grande maioria dos problemas que devem ser estudados na vida real são combinações de escoamentos simples. À combinação destes se dá o nome de Escoamentos Compressíveis Unidimensionais Generalizados e a solução para estes problemas se dá através de métodos numéricos mais complexos.

Este projeto consiste na criação de uma planilha para a resolução de problemas na área dos escoamentos generalizados de gases, podendo englobar um ou mais escoamentos simples. Os escoamentos simples aqui analisados serão: diferença de área (bocal), atrito (escoamento Fanno), troca de calor (escoamento Rayleigh), arrasto e adição/supressão de massa, porém o foco será dado em escoamentos com troca de calor e atrito simultaneamente.

2 METODOLOGIA

Para a resolução de problemas sobre escoamentos generalizados será usado o método dos coeficientes de influência. Este método é bastante flexível e muito discutido na literatura.

O método consiste na aplicação das equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia para tubos de corrente infinitesimais incluindo simultaneamente todos os potenciais variáveis nos escoamentos simples.

Depois da aplicação das equações chega-se em um sistema linear de 8 equações diferenciais onde todas as variáveis dependentes (número de Mach, pressão, temperatura, densidade, velocidade, pressão de estagnação, força e entropia) estarão em função do número de Mach local e de 4 potencias, ou variáveis independentes (variação de área, variação da temperatura de estagnação, vazão em massa e outro potencial que relaciona atrito e arrasto).

Através destas equações, será criada uma planilha onde serão implementados métodos simples para a resolução destas, permitindo a resolução de problemas no escopo de escoamentos generalizados.

3 DETALHAMENTO DO CRONOGRAMA

1º Semestre

- ✓ *Aprofundamento do Tema*: estudo dos escoamentos generalizados e análise de todas as possibilidades de escoamentos, para a escolha específica do tema.
- ✓ *Análise e Aprofundamento do Software*: aprofundamento do software e estudo de como serão implementadas as possíveis funções no programa.
- ✓ *Elaboração do Relatório Parcial*: resumo do projeto, detalhamento do cronograma, análises e resultados preliminares.
- ✓ *Revisão do Relatório Parcial*
- ✓ *Aquisição de Novos Conceitos*: a partir da revisão do relatório parcial, analisa-se todos os conceitos já estudados e procura-se adquirir novos conceitos para um aprofundamento maior.
- ✓ *Elaboração do Equacionamento a ser Inserido no Programa*: a partir dos conceitos obtidos elabora-se as equações que serão inseridas dentro da planilha.
- ✓ *Elaboração do Relatório Final I*
- ✓ *Revisão do Relatório Final I*

2º Semestre

- ✓ *Planejamento Detalhado do 1º Semestre de 2011*: planejamento mais detalhado do TF para o primeiro semestre durante o recesso escolar.
- ✓ *Possível Elaboração de Outras Funções*: possível elaboração de novas funções para a implementação de outros tipos de escoamento.
- ✓ *Elaboração do Relatório Parcial II*
- ✓ *Revisão do Relatório Parcial II*
- ✓ *Começar a inclusão de todo o equacionamento e das possíveis sub-funções na planilha*: esta tarefa é a mais longa de todo o projeto e provavelmente ocupará lugar também no 3º semestre.
- ✓ *Redigir Relatório Final II*

- ✓ *Criação de Pôster I*
- ✓ *Elaboração do Artigo Técnico I*
- ✓ *Revisão do Relatório Final II e do Artigo Técnico I*
- ✓ *Montar Apresentação*

3º Semestre

- ✓ *Finalização da planilha e criação da interface do usuário*
- ✓ *Redigir Relatório Parcial III*
- ✓ *Revisão do Relatório Parcial III*
- ✓ *Testes na Planilha*
- ✓ *Correção de eventuais erros na planilha*
- ✓ *Elaboração do Relatório Final III*
- ✓ *Criação de Pôster II*
- ✓ *Elaboração do Artigo Técnico II*
- ✓ *Revisar Relatório Final III e Artigo Técnico II*
- ✓ *Montagem da Apresentação Final*

4 ESCOAMENTOS GENERALIZADOS

4.1 Equacionamento

Considera-se um escoamento em uma distância infinitesimal (dx) entre duas seções de um duto. Neste escoamento há variação da vazão mássica (adição ou redução de massa), troca de calor através do duto, atrito na tubulação e por fim a variação da seção transversal do duto. Podemos observar este caso na figura a seguir^[6]:

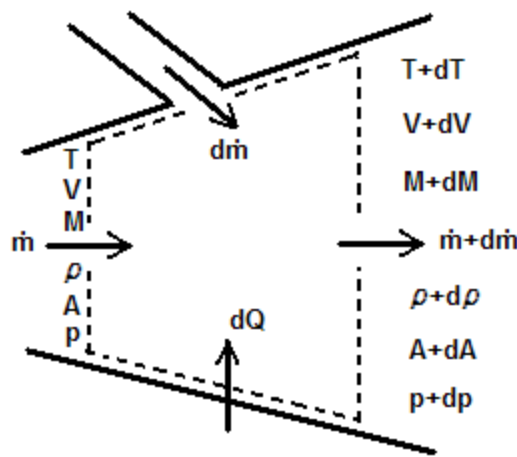


Figura 1 - Escoamento em um duto

No volume de controle serão aplicadas uma série de equações físicas, de estado e de conservação. Como trata-se de um pedaço dx de duto, as equações serão tratadas todas em sua forma diferencial. As equações serão expostas com o intuito de exibir a base do equacionamento da solução de um escoamento generalizado, sendo suas deduções pouco importantes neste contexto^[6].

Equação de estado

Para um gás perfeito, sabe-se que:

$$p = \rho RT \quad (4-1)$$

Então:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (4-2)$$

Número de Mach

Da definição do número de Mach e usando a equação 4-3:

$$M = \sqrt{\frac{V}{c}} \quad (4-5)$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T} \quad (4-6)$$

Considerando que o gás possua um k constante.

Equação da Continuidade / Conservação de Massa

Sabe-se que:

$$\dot{m} = \rho AV \quad (4-7)$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \quad (4-8)$$

Temperatura e Pressão (Estáticas e de Estagnação)

Pode-se relacionar as temperaturas/pressões estáticas e de estagnação da seguinte forma:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \left(\frac{(k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right) \frac{dM}{M} \quad (4-9)$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \left(\frac{kM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right) \frac{dM}{M} \quad (4-10)$$

Equação de Energia

A equação de conservação de energia pode ser dada por:

$$\frac{dQ - dW - dH_i}{c_p T} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} \quad (4-11)$$

Onde dH_i é um termo referente a energia do sistema, dado por:

$$dH_i = h_i d\dot{m}$$

Equação de Momento Linear

Considerando que o a massa injetada ou subtraída do sistema possua as mesmas propriedades químicas do fluido que corre no duto e que este fluido adicional adentra o volume de controle com velocidade V_i e angulação α_i , teremos que a equação da conservação do momento linear é dada por:

$$\begin{aligned} pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA - dF_D - \tau_w dA_w \\ = (\dot{m} + d\dot{m})(V + dV) - \dot{m}V - V_i \cos \alpha_i d\dot{m} \end{aligned} \quad (4-12)$$

O termo F_D é referente ao arrasto devido a corpos imersos no escoamento e τ_w é o cisalhamento da parede do duto.

Usando o fator atrito de Fanno, aplicando o conceito de diâmetro hidráulico e fazendo algumas transformações, pode-se chegar na equação final da conservação da quantidade de momento linear:

$$\frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{2} \frac{dV^2}{2} + \frac{kM^2}{2} \left(4f \frac{dx}{D_h} + \frac{2dF_D}{kM^2 pA}\right) + kM^2(1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (4-13)$$

Onde:

$$y = \frac{V_{ix}}{V_i}$$

Impulso

A função impulso é definida pela seguinte fórmula:

$$F = pA + \rho AV^2 = pA(1 + kM^2) \quad (4-14)$$

$$\frac{dF}{F} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{2kM^2}{1 + kM^2} \frac{dM}{M} \quad (4-15)$$

Segunda Lei da Termodinâmica

Aplica-se a segunda lei da termodinâmica para se obter a variação de entropia, que pode ser dada em sua forma diferencial por:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{k-1}{k} \frac{dp}{p} \quad (4-16)$$

Através de todo este equacionamento exibido, pode-se chegar a 8 equações diferenciais que relacionam as variáveis dependentes do sistema às variáveis independentes, que são aquelas que definem as características do problema:

Variação da área transversal do duto

$$\frac{dA}{A}$$

Representa como varia a área transversal da passagem através do escoamento. Será usada no caso em que há bocais no duto. Com tubulações de área transversal constante $dA/A = 0$.

Variação da temperatura de estagnação

$$\frac{dT_0}{T_0}$$

Representa como varia a temperatura de estagnação ao longo do escoamento. Será utilizada para representar a troca de calor que ocorre durante o escoamento.

Variação do fluxo de massa

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Representa o fluxo de massa através de cada seção do duto. Mostra se há adição ou subtração de massa o longo do escoamento.

Variação de atrito e arrasto

$$\left(4f \frac{dx}{D_h} + \frac{2dF_D}{kM^2 pA}\right)$$

A primeira parcela da equação representa como varia o atrito na tubulação ao longo do escoamento e a segunda parcela a variação do arrasto. O arrasto é geralmente induzido pela introdução de corpos/objetos no escoamento.

4.2 Coeficientes de Influência

Com as 8 equações citadas acima e realizando algumas passagens algébricas, que envolvem matrizes e não serão demonstradas aqui, pode-se chegar a seguinte tabela 1, em anexo^[5].

Na primeira coluna da tabela estão todas as variáveis dependentes, que quase sempre são as incógnitas dos problemas. Na primeira linha se encontram as variáveis independentes, que são dadas no problema e definem o estado do escoamento em qualquer seção do duto. Finalmente, no meio da tabela se encontram os coeficientes de influência, que só dependem do número de Mach, e relacionam as variáveis dependentes com as independentes.

Como exemplo do uso da tabela pode-se escrever a equação do número de Mach para qualquer seção do escoamento:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} = & -\frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{(1+kM^2)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)} \frac{dT_0}{T_0} \\ & + \frac{kM^2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)} \left(4f \frac{dx}{D_h} + \frac{dF_D}{\frac{1}{2}kpAM^2}\right) \\ & + \frac{(1+kM^2)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \end{aligned}$$

Porém, todas estas equações podem ser representadas em função de dx , que representa a variação da propriedade em questão ao longo do duto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = & -\frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{(1+kM^2)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)} \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \\
& + \frac{kM^2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)} \left(4 \frac{f}{D_h} + \frac{dF_D/dx}{\frac{1}{2}kpAM^2}\right) \\
& + \frac{(1+kM^2)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx}
\end{aligned} \tag{4-17}$$

Sendo assim, fornecidas as variáveis independentes, pode-se integrar esta equação e encontrar uma função $M(x)$, que fornece o valor do número de Mach em qualquer seção do duto que se esteja interessado.

Procedendo assim, há duas maneiras de se resolver os problemas de escoamentos generalizados. Primeiramente todos os dados da seção de entrada (seção 1) devem ser dados no enunciado do problema e a partir destes dados deve-se descobrir todas as propriedades de uma outra seção requerida. O primeiro método é resolver as equações diferenciais da tabela 1, para cada propriedade na qual se está interessado. Outro método é resolver apenas a equação do número de Mach (4-17) e a partir desta solução, usar as *Relações ou Equações Integrais*, que serão demonstradas a seguir.

4.3 Equações Integrais

As equações integrais consistem em relacionar dois pontos do escoamento, podendo assim encontrar propriedades de um ponto 2, conhecendo-se as propriedades do ponto 1^[6].

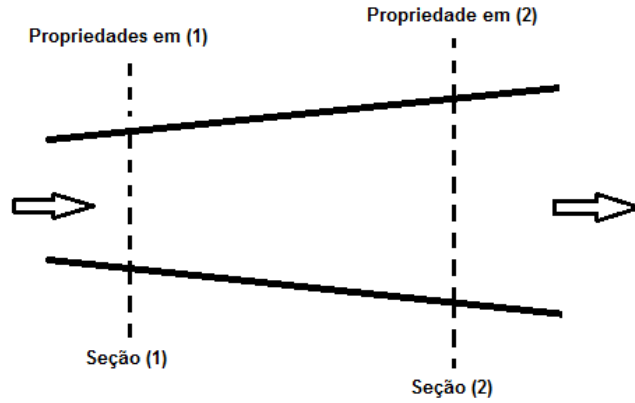


Figura 2 - Escoamento entre duas seções

Por exemplo, através da equação da pressão de estagnação, dada por:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)$$

Podemos relacionar as temperaturas nas duas seções. Equacionando as temperaturas de estagnação para cada ponto e dividindo uma equação pela outra:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{02} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)}{T_{01} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)} \quad (4-18)$$

Sabe-se que a variação dos potenciais independentes é dada e as propriedades da seção 1 (podem ser dadas as propriedades do ponto 2 para que se descubra as do ponto 1, mas neste caso o ponto 2 será considerado como incógnita). Assim, tem-se a variação dT_0/dx e com isso as temperaturas de estagnação T_{01} e T_{02} além de T_1 e M_1 dados. Os números de Mach são encontrados através da integração da equação (4-17) e assim podemos encontrar o valor da temperatura na seção 2 do escoamento.

Da equação do fluxo de massa, pode-se retirar mais uma relação:

$$\dot{m} = \rho AV = \sqrt{\frac{k}{RT}} p A M$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dot{m}_2 A_1 M_1}{\dot{m}_1 A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (4-19)$$

A relação das áreas e dos fluxos de massas são retirados da variação do potencial dado. Os números de Mach já foram achados por integração e a relação de temperaturas pela equação (4-17). Assim pode-se encontrar a pressão na seção 2.

Procedendo da mesma maneira com as equações de número de Mach, pode-se encontrar uma relação para as velocidades e assim encontrar a velocidade do escoamento na seção 2:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (4-20)$$

Através da equação de estado (4-1), encontra-se a densidade em (2):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \quad (4-21)$$

Relacionando as equações de pressão e temperatura de estagnação, tem-se:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Executando o mesmo processo já efetuado para as outras equações:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_{02} T_1}{T_{01} T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4-22)$$

E assim tem-se facilmente a pressão de estagnação no ponto 2 do duto.

Por fim, calcula-se a variação de entropia de forma simples:

$$s_2 - s_1 = \Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (4-23)$$

Sendo assim, através de todas estas relações exibidas acima (equações 4-19 a 4-23), é possível descobrir todas as propriedades na seção 2, que eram as incógnitas do problema.

5 ESCOAMENTO EM UM TROCADOR DE CALOR COM ATRITO

Neste trabalho não serão analisadas todas as variações analisadas no item acima. O foco será dado para escoamentos em trocadores de calor com atrito^[2]. Também consideraremos que há apenas atrito nas paredes do duto, desconsiderando a parcela diferencial referente ao arrasto. Assim, podemos simplificar a equação (4-16):

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{(1 + kM^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{1 - M^2} \frac{dT_0}{T_0} + \frac{kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{1 - M^2} \left(4f \frac{dx}{D_h}\right) \quad (5-1)$$

Análise Geral. Considerando o comprimento infinitesimal do duto dx , a taxa de troca de calor pode ser expressa através do coeficiente de transferência de calor \mathcal{H} , em termos da temperatura adiabática da parede (T_{ap}) e da temperatura da parede da tubulação (T_p).

$$\dot{m} \cdot dQ = \frac{\pi}{4} D^2 \rho V c_p dT_0 = \mathcal{H} \pi D dx (T_p - T_{ap})$$

Quando o escoamento é subsônico (grande maioria dos casos), a temperatura adiabática da parede (T_{ap}) não difere muito da temperatura de estagnação T_0 , sendo totalmente aceitável a sua substituição. Sendo assim:

$$\frac{dT_0}{T_p - T_0} = \frac{4\mathcal{H}}{\rho V c_p} \frac{dx}{D} \quad (5-2)$$

Os fenômenos de transferência de calor e atrito estão intimamente ligados e a partir deste ponto devemos usar a Analogia de Reynolds, que relaciona os dois fenômenos. Esta analogia mostra, através de experimentos, que os coeficientes de troca de calor e atrito estão relacionados através da fórmula:

$$\frac{\mathcal{H}}{\rho V c_p} = \frac{f}{2}$$

Substituindo a equação acima na em (5-2):

$$\frac{dT_0}{T_p - T_0} = 2f \frac{dx}{D} \quad (5-3)$$

Finalmente, rearranjando a equação (5-1):

$$dM^2 = F_{T_0} \frac{dT_0}{T_0} + F_f 4f \frac{dx}{D} = \left(F_{T_0} + \frac{2T_0}{T_p - T_0} F_f \right) \frac{dT_0}{T_0} \quad (5-4)$$

E conseqüentemente:

$$\frac{dM}{dx} = \left(F_{T_0} + \frac{2T_0}{T_p - T_0} F_f \right) \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \quad (5-5)$$

Onde:

$$F_{T_0} = \frac{\left(M^2 (1 + kM^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right)}{2(1 - M^2)}$$

$$F_f = \frac{kM^4 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}{2(1 - M^2)}$$

A partir da equação 11, podemos integrá-la e descobrir o número de Mach na seção requerida e através deste número de Mach descobrir as outras propriedades de interesse. Outro método, já discutido, é integrar as equações dos coeficientes de influência exibidas na tabela 1 em anexo, eliminando as variáveis independentes não estudadas neste caso (variação de área e massa).

Serão estudados os dois casos principais de um escoamento com troca de calor e atrito: o caso onde a temperatura de parede é constante ao longo do escoamento e o caso onde o fluxo de calor para o fluido é constante ao longo do duto.

5.1 Caso de temperatura de parede constante

Nos casos em que a temperatura de parede for considerada constante, tem-se que T_p não varia com x . Assim, pode-se integrar facilmente a equação (5-3)^[2]:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{4f(x_2 - x_1)}{D} \right] = \ln \frac{T_p - T_{01}}{T_p - T_{02}} \quad (5-6)$$

Considerando que a seção (1) é o ponto onde $x = 0$, todas suas propriedades são dadas e f , D e T_p conhecidos, pode-se descobrir a temperatura de estagnação para qualquer seção (2) que se queira:

$$T_0(x) = T_p - (T_p - T_{01})e^{-\left(\frac{2fx}{D}\right)}$$

5.2 Caso de fluxo de calor constante

Neste caso o fluxo de calor por unidade de área é o mesmo durante toda a tubulação. Assume-se então que o coeficiente de troca de calor \mathcal{H} seja constante e assim $T_p - T_0$ é constante durante todo o duto. Ou seja^[2]:

$$T_{p1} - T_{01} = T_{p2} - T_{02}$$

Pode-se escrever a equação (5-3):

$$\frac{dT_0}{T_{p1} - T_{01}} = 2f \frac{dx}{D}$$

E a integração ficaria:

$$\frac{(T_{02} - T_{01})}{T_{p1} - T_{01}} = 2f \frac{x_2 - x_1}{D} \quad (5-7)$$

Considerando o ponto (1) como o ponto onde $x = 0$ e sabendo que $T_p - T_0 = C = cte$:

$$T_0(x) = \frac{2fxC}{D} + T_{01} \quad (5-8)$$

Da mesma forma que no caso com temperatura de parede constante, a equação (5-7) permite que se calcule qualquer valor de T_0 em função de uma distância x do duto.

Com isto, chega-se a conclusão que haverá duas maneiras simples de se resolver um problema de escoamento generalizado em um trocador de calor com atrito.

1. Dão-se todas as propriedades do fluido em uma seção 1 do duto e a temperatura de parede constante durante toda tubulação (T_p). Com este dado, acha-se a variação da temperatura de estagnação no escoamento dT_0/dx . Assim, integra-se a equação do número de Mach e através das relações

integrais descobrem-se as propriedades do fluido em qualquer outra seção do duto.

2. Dão-se todas as propriedades do fluido em uma seção 1 do duto e a diferença entre a temperatura de parede e de estagnação, $T_p - T_0$, que será constante ao longo de toda a tubulação, uma vez que o coeficiente de troca de calor \mathcal{H} é constante. Com este dado, acha-se a variação da temperatura de estagnação no escoamento dT_0/dx . Assim, integra-se a equação do número de Mach e através das relações integrais descobrem-se as propriedades do fluido em qualquer outra seção do duto.

6 COEFICIENTE DE ATRITO VARIÁVEL

Para que a planilha se torne uma ferramenta ainda mais poderosa, será considerado que o fator de atrito pode variar ao longo do duto.

O fator de atrito f é uma grandeza que varia proporcionalmente ao número de Reynolds do escoamento. Sendo assim, para cada seção será calculado o número de Reynolds, que é dado através da fórmula^[3]:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Sabe-se que a vazão mássica do escoamento é constante durante todo o duto. Sendo assim, a parcela $\rho V D$ será constante para todas as seções, fazendo com que o número de Reynolds varie apenas em função da viscosidade μ .

Com esta condição, para cada seção deverá ser calculada a viscosidade, através da Lei de Sutherland^[4]:

$$\mu = 0,00001716 \left(\frac{T}{273,1} \right)^{1,5} \frac{384,1}{T + 111}$$

Pode-se reparar que ela dependerá apenas da temperatura do fluido na seção analisada.

Finalmente, pode-se calcular o coeficiente de atrito. Ele será calculado através de duas fórmulas, pois dependerá se o fluido está em regime laminar ou turbulento. Para regime laminar, ou seja, Reynolds menor que 2000, é encontrado por^[3]:

$$f = \frac{64}{Re}$$

Já em regime turbulento, que será considerado quando o número de Reynolds for maior que 2000, é calculado por^[4]:

$$f = \frac{0,0625}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}$$

Onde a parcela ε/D é a rugosidade do duto, que deve ser fornecida nas entradas do problema e será considerada constante durante todo o escoamento.

7 ESCOAMENTO COM PONTO SÔNICO PRESENTE

Há um grande problema quando o escoamento tratado atingir o ponto sônico, pois a equação diferencial 5.1 do número de Mach, e consequentemente a 5.5, possuem descontinuidades neste ponto.

Quando um escoamento atinge o ponto sônico, sendo vindo de Mach menor ou maior que 1, para que ele ultrapasse este ponto e continua a crescer, ou diminuir, é preciso que se mude as condições do escoamento, fato que não é estudado neste projeto. Sendo assim, o Mach se manterá igual a unidade até o fim do escoamento. Algumas outras propriedades, que dependem apenas do Mach, também continuarão constantes; já outras, que dependem, por exemplo, da troca de calor (que continua a variar por todo o duto) continuarão se alterando até o fim do escoamento.

Para resolver este problema da descontinuidade na planilha, foi criada uma função para que quando Mach chegue perto da unidade, ele seja igualado a 1,01 e assim mantido constante até o fim do escoamento. Foi definido na planilha que o Mach será igualado a 1,01 quando o escoamento atingir Mach entre 0,98 e 1,02. Para que esta função funcione perfeitamente, é recomendado que se use no mínimo 100 passos de integrações, ajustando estes através do passo dx .

8 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

Uma vez claras as equações diferenciais ordinárias a serem resolvidas, deve-se escolher qualquer algoritmo numérico que possa resolvê-las.

Aqui método aqui escolhido será o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, um dos mais empregados na literatura. O “RK4”, ou mesmo método de Runge-Kutta, foi escolhido não só por sua precisão e simplicidade, mas também por ser um método fácil de ser implementado em uma planilha^[1].

8.1 Runge-Kutta de 4ª Ordem

Suponhamos uma equação diferencial do tipo:

$$y' = f(t, y), \text{ com } y(t_0) = y_0$$

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

O valor de y_{n+1} é a aproximação de $y(t_{n+1})$ por Runge-Kutta de 4ª ordem. Também temos definido que:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Este método baseia-se no fato de sempre o próximo valor (y_{n+1}) ser determinado pelo valor atual (y_n) somado com o produto do tamanho do intervalo/ passo de integração (h) e uma inclinação estimada. A inclinação em questão nada mais é do que a derivada da variável analisada em um ponto específico. Esta inclinação estimada de RK4 é uma média ponderada das inclinações k :

- k_1 é a inclinação no início do intervalo;

- k_2 é a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação k_1 para determinar o valor de y no ponto $t_n + h/2$ através do método de Euler;
- k_3 também é a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação k_2 para determinar o valor de y ;
- por fim, k_4 é a inclinação no final do intervalo, com seu valor de y determinado por k_3 .

Definido isto, é feita uma média ponderada com todas as inclinações, dando-se peso dois para as inclinações do ponto médio. Sendo assim:

$$inclinação = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

Percebe-se que este é o coeficiente empregado na primeira equação do método de Runge-Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot inclinação$$

A figura que se segue ilustra a iterativa etapa básica do método de Runge-Kutta de 4ª ordem:

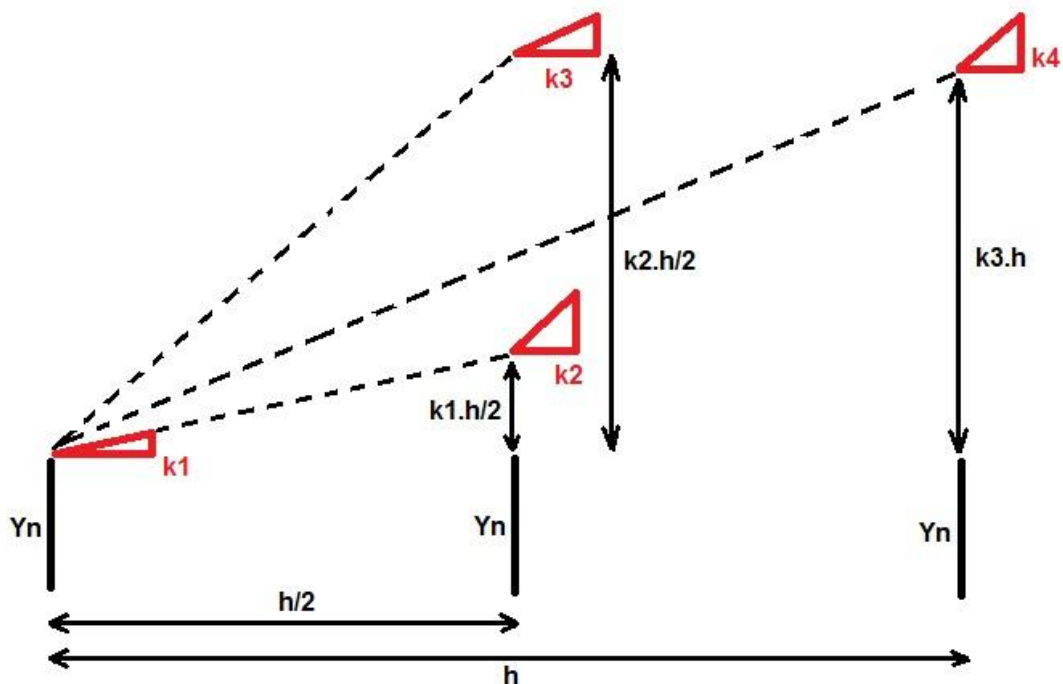


Figura 3 - Ilustração da iteração básica do Método de Runge-Kutta 4

8.2 Implementação do método na planilha

O software que será usado para a elaboração da planilha será o Microsoft Excel 2010. É um software fácil de ser usado e muito comum no mercado.

Para demonstrar como será implementado o método de Runge-Kutta na planilha, usaremos um exemplo bem simples de equação diferencial^[1]:

$$y'(t) = y(t)$$

Obviamente as equações a serem implementadas serão de maior complexidade e pequenos ajustes deverão ser feitos. Será usado este exemplo simples apenas para demonstrar o processo que será usado dentro do Excel.

Primeiramente deve-se definir o passo de integração h , ou dt , e a condição inicial y_0 .

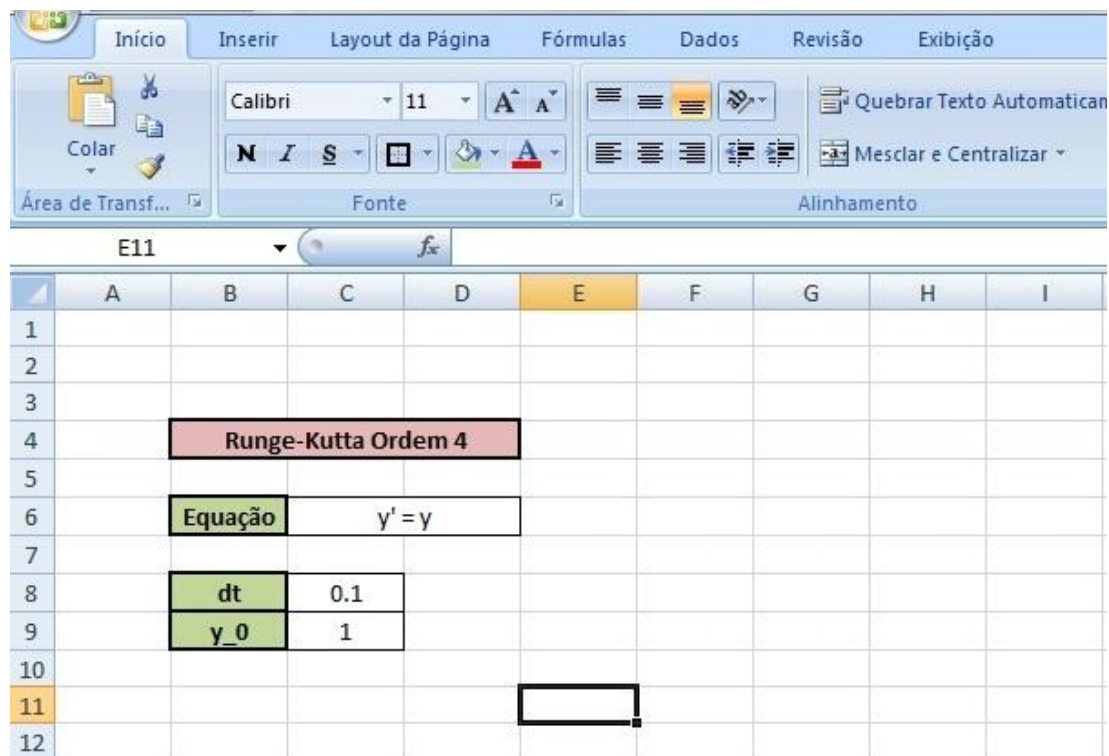


Figura 4 - Definição de parâmetros iniciais

Após definidos estes parâmetros, cria-se uma tabela com os seguintes parâmetros:

- n – representa o número de iterações que estão sendo feitas;
- t – pode ser o tempo, ou distância, etc. É nele que será implementado o intervalo de integração dt ;

- y – variável da equação;
- y' – representa a equação em si e os valores das inclinações para as iterações;
- Solução – a solução real da equação.

Criada a tabela, preenchemos a primeira linha com as condições iniciais já pré-definidas. A coluna da solução será preenchida depois apenas com o intuito de comparação entre a solução real e a solução do método.

Colar

Calibri

11

Fonte

Alinhamento

Quebrar Texto Automaticamente

Mesclar e Centralizar

Geral

% 000

Número

Formatação Condicional

S23

Runge-Kutta Ordem 4

Equação

dt

y_0

y' = y

0.1

1

n	t	y	y'	Solução
0	0	1	1	

Igual a y_0

Pela equação: y' = y

Nesta primeira linha, y' representa K1 = f(t_n, y_n)
Ou seja:
t_n = t_0 = 0
y_n = y_0 = 1
y' = f(t, y) = f(0, 1)

Figura 5 - Criação da tabela e cálculo de K1

Esta primeira linha representa o cálculo da inclinação k_1 . Como visto anteriormente, $k_1 = f(t_n, y_n)$, então na coluna t temos t_0 , e na coluna y temos y_0 . Como a equação pré-definida foi $y' = y$ a coluna y' será sempre igual a coluna y e representa k_1 para o método.

A segunda linha representará o cálculo da inclinação k_2 . Como já visto, $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 * \frac{h}{2}\right)$. Então, na coluna t temos $\left(t_0 + \frac{dt}{2}\right)$ e na coluna y temos $\left(y_0 + k_1 * \frac{dt}{2}\right)$, lembrando que k_1 será dado por y' da linha adjacente acima.

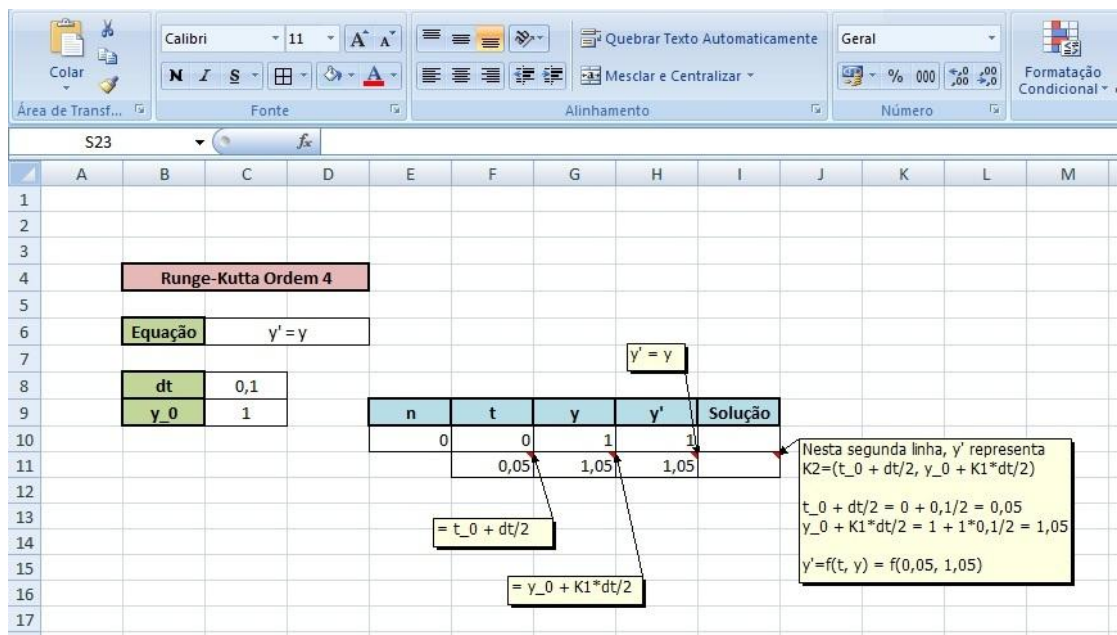


Figura 6 - Cálculo de K2

Procede-se da mesma maneira para as linhas 3 e 4, sempre representando as inclinações k' s.

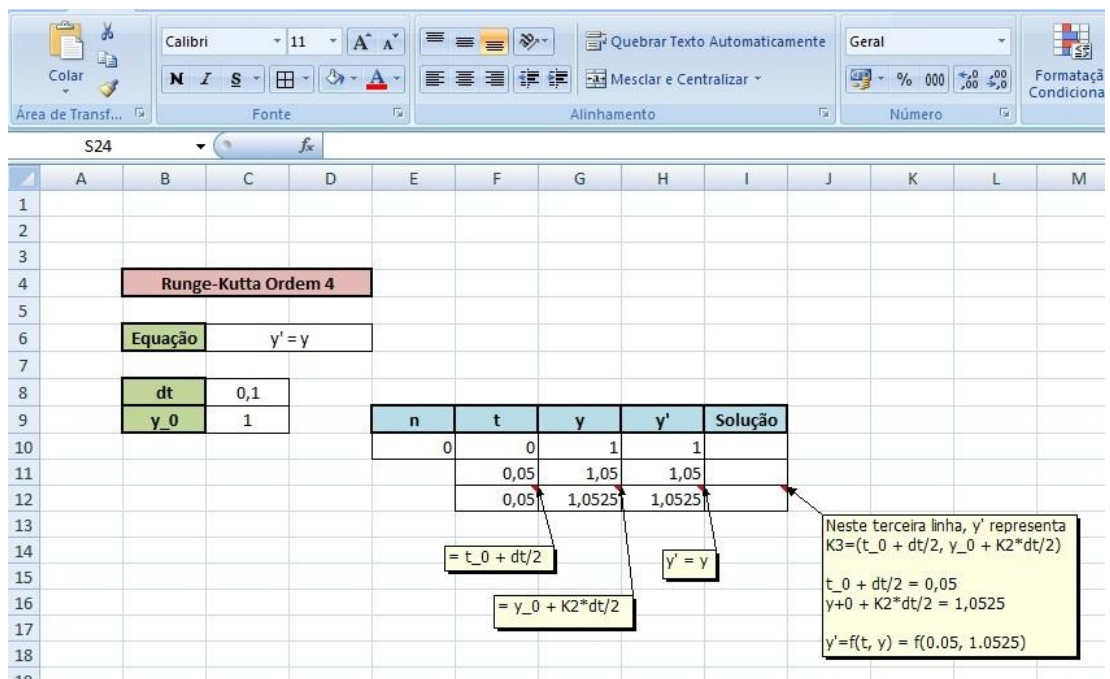


Figura 7 - Cálculo de K3

The diagram illustrates the Runge-Kutta 4th order method for solving the differential equation $y' = y$. It shows the initial conditions, the step size, and the iterative calculation of y values over time t .

Runge-Kutta Ordem 4

Equação $y' = y$

dt 0,1

y_0 1

n	t	y	y'	Solução
0	0	1	1	
	0,05	1,05	1,05	
	0,05	1,0525	1,0525	
	0,1	1,10525	1,10525	

Annotations and formulas:

- $t = t_0 + dt$
- $y = y_0 + K3 * dt$
- $y' = y$

Nesta quarta linha o y' representa $K4 = f(t_0 + dt, y_0 + K3 * dt)$

$t_0 + dt = 0,1$
 $y_0 + K3 * dt = 1,10525$
 $y' = f(t, y) = f(0,1, 1.10525)$

Por fim, agora pode-se calcular o y_{n+1} , previamente demonstrado pela fórmula:

E assim iniciar uma nova etapa da iteração.

Figura 9 - Terminada primeira etapa da iteração

Sendo assim, prolongamos esta iteração para quantas etapas quisermos. Quanto mais etapas, maior será a extensão da curva plotada com os resultados.

Sabe-se que a solução real desta equação diferencial é $y(t) = e^t$. Assim, podemos comparar os resultados obtidos pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 com os resultados reais.

Colar

Fonte

Calibri

11

A⁺

Quebrar Texto Automaticamente

Mesclar e Centralizar

Geral

% 00

Númer

T26

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
3											
4		Runge-Kutta Ordem 4									
5											
6		Equação	y' = y								
7											
8		dt	0,1								
9		y_0	1								
10					n	t	y	y'	Solução		
11					0	0	1	1	1		
12						0,05	1,05	1,05			
13						0,05	1,0525	1,0525			
14						0,1	1,10525	1,10525			
15					1	0,1	1,105171	1,105171	1,105171		
16						0,15	1,160429	1,160429			
17						0,15	1,163192	1,163192			
18						0,2	1,22149	1,22149			
19					2	0,2	1,221403	1,221403	1,221403		
20						0,25	1,282473	1,282473			
21						0,25	1,285526	1,285526			
22						0,3	1,349955	1,349955			
23					3	0,3	1,349858	1,349858	1,349859		
24						0,35	1,417351	1,417351			
25						0,35	1,420726	1,420726			
26						0,4	1,491931	1,491931			
27					4	0,4	1,491824	1,491824	1,491825		

Figura 10 - Iterações e comparação de resultados

Percebe-se, pela comparação dos resultados, que a discrepância das soluções é muito pequena, comprovando um resultado muito satisfatório do método utilizado.

Após feitas quantas iterações se fizerem necessárias, basta agrupar os resultados e plotar os gráficos.

9 FUNCIONAMENTO DA PLANILHA

Nesta seção será explicado o funcionamento da planilha e o modo como usá-la e entender seus resultados.

A planilha consiste de 3 abas:

- ✓ Entradas (aba azul)
- ✓ Cálculos (aba vermelha)
- ✓ Gráficos (aba verde)

9.1 Entradas

Nesta aba, o usuário entrará com todos os dados necessários para que a planilha possa calcular os dados de saída.

As únicas células que podem ser editadas nesta aba são as que estão sinalizadas em verde e amarelo. As células verdes, são de preenchimento obrigatório e são essenciais para que a planilha possa devolver os resultados mínimos esperados. As células amarelas são de preenchimento opcional, e são essenciais apenas se o usuário necessitar de algumas informações adicionais como o valor da pressão de estagnação ao longo do duto, o valor da pressão ao longo do duto e a variação de entropia.

As células vermelhas são de preenchimento automático por parte da planilha e não devem ser alteradas.

9.1.1 Integração

Primeiramente deve-se entrar com o passo da integração (dx). O passo de integração representa a precisão da curva que será plotada no gráfico. Em outras palavras, o passo da integração será em quantas partes “dividiremos” o duto analisado. Este parâmetro está intimamente ligado ao comprimento do duto. Se, por exemplo, o duto possuir 10cm e o passo da integração for definido em 0,01m, a planilha executará 10 iterações, dividindo o duto em 10 partes e achando os valores das propriedades nestes pontos. A planilha calculará automaticamente (através dos

valores de dx e do comprimento do duto) quantas iterações deverá fazer e este número aparecerá logo abaixo do passo da integração.

Integração	
Passo dx	0,01
Nº de integrações	50

Figura 11 - Exemplo de como o passo aparecerá na planilha

9.1.2 Dados do escoamento

Neste campo deve-se entrar com os dados iniciais do escoamento para que a planilha tenha condições de calcular as saídas do problema. São eles:

- Preenchimento obrigatório:
 - ✓ Número de Mach inicial - M
 - ✓ Diâmetro do duto - D
 - ✓ Rugosidade do duto - ε/D
 - ✓ Temperatura de parede inicial - T_{p1}
 - ✓ Índice adiabático do fluido - k
 - ✓ Comprimento do duto - L
 - ✓ Temperatura inicial - T_1 (necessária para cálculo da viscosidade)
 - ✓ Massa específica inicial - ρ_1 (necessária para cálculo de Reynolds)

- Preenchimento opcional:
 - ✓ Pressão de estagnação inicial - p_{01}
 - ✓ Pressão inicial - p_1
 - ✓ Calor específico - c_p (será considerado constante ao longo do duto)

- Preenchimento automático:
 - ✓ Número de integrações (é calculada dividindo-se o comprimento do duto pelo passo dx)
 - ✓ Temperatura de estagnação inicial - T_{01} (é calculada através do fórmula $T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)$)

✓ Velocidade inicial – T_1 (é calculada através do número de Mach)

Com estes dados a planilha conseguirá plotar todas as relações de propriedades entre a seção inicial (1) do duto e a seção final do duto requerida. Ou seja, por exemplo, ela poderá plotar o gráfico da relação T_2/T_1 ao longo do duto.

Dados do escoamento			
Mach inicial	M	1,4	-
Diâmetro do duto	D	0,4	m
Rugosidade do duto	ε/D	0,1	-
Temperatura de estagnação inicial	T_{01}	1114	K
Temperatura de parede inicial	T_{p1}	3000	K
Índice adiabático do fluido	k	1,4	-
Comprimento do duto	L	1	m
Temperatura inicial	T_1	800	K
Massa específica inicial	ρ_1	1,00	kg/m ³
Velocidade inicial	V_1	481,0	m/s
Pressão de estagnação inicial	p_{01}		kg/m ³
Pressão inicial	p_1		kPa
Calor específico	C_p	1076,00	J/(kg.K)

Figura 12 - Exemplo de preenchimento dos Dados do Escoamento

9.1.3 Botão calcular

O botão calcular serve para que rode a macro onde serão executados os “n” passos de integração definidos pelo usuário.

Este botão precisa ser utilizado apenas quando for alterado o número de integrações a serem feitas, ou seja, quando for alterado o passo da integração ou o comprimento do duto. Para todas as outras células alteradas, este botão não precisa ser acionado.

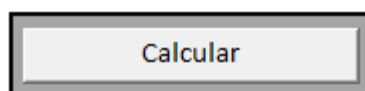


Figura 13 - Botão para acionar os cálculos da planilha

9.2 Cálculos

Na aba de cálculos a planilha efetuará a integração pelo método de Runge Kutta de Ordem 4, já descrita acima, e também o cálculo das propriedades pelas equações integrais.

Nesta aba os cálculos estão divididos pelos 2 casos já especificados neste relatório: fluxo de calor constante e temperatura de parede constante. A planilha usará os dados preenchidos pelo usuário para calcular das 2 maneiras, porém o usuário deve focar-se apenas no caso em que está analisando.

Temperatura de Paredo Constante																								
n	x	M	M'	T ₀	d _{tu} /dx	Reynolds	f	F _t	F _i	Dado T1		Dado p1		Dado V1		Dado p1		Dado p1		p02	p01	p02	p01	μ
										T02	T2/T1	T2	p2/p1	p2	V2/V1	V2	p2/p1	p2	p02/p01					
0	0	1,4	-0,54032	3000	-254	5304513	0,02542	-5,32022	-8,89922	3000	1,000	800	1,000	0,00	1,000	481,0	1,000	1,00	1,000	0,00	0,00	0,0000363		
	0,005	1,397298	-0,53945	2999	-254	5304513	0,02542	-5,32088	-8,89568	2999	1,001	801	1,002	0,00	0,998	480,3	1,002	1,00	0,998	0,00	0,69	0,0000363		
	0,005	1,397303	-0,53946	2999	-254	5302327	0,02542	-5,32088	-8,89568	2999	1,001	801	1,002	0,00	0,998	480,3	1,002	1,00	0,998	0,00	0,69	0,0000363		
	0,01	1,394605	-0,53861	2997	-254	5302333	0,02542	-5,32174	-8,89228	2997	1,001	801	1,005	0,00	0,997	479,5	1,003	1,00	0,997	0,00	1,38	0,0000363		
	0,01	1,394605	-0,53861	2997	-254	5300157	0,02542	-5,32174	-8,89228	2997	1,001	801	1,005	0,00	0,997	479,5	1,003	1,00	0,997	0,00	1,38	0,0000363		
1	0,015	1,391912	-0,53779	2996	-254	5300157	0,02542	-5,32281	-8,88901	2996	1,002	802	1,007	0,00	0,995	478,7	1,005	1,00	0,995	0,00	2,07	0,0000363		
	0,015	1,391916	-0,53779	2996	-254	5297990	0,02542	-5,32281	-8,88902	2996	1,002	802	1,007	0,00	0,995	478,7	1,005	1,00	0,995	0,00	2,07	0,0000363		
	0,02	1,389228	-0,53698	2995	-254	5297996	0,02542	-5,32408	-8,88589	2995	1,003	802	1,009	0,00	0,994	478,0	1,006	1,01	0,994	0,00	2,76	0,0000363		
	0,02	1,389228	-0,53698	2995	-254	5295838	0,02542	-5,32408	-8,88589	2995	1,003	802	1,009	0,00	0,994	478,0	1,006	1,01	0,994	0,00	2,76	0,0000363		
	0,025	1,386543	-0,53619	2994	-253	5295838	0,02542	-5,32557	-8,88291	2994	1,003	803	1,011	0,00	0,992	477,2	1,008	1,01	0,992	0,00	3,44	0,0000363		
2	0,025	1,386547	-0,5362	2994	-253	5293690	0,02542	-5,32556	-8,88291	2994	1,003	803	1,011	0,00	0,992	477,2	1,008	1,01	0,992	0,00	3,44	0,0000363		
	0,03	1,383866	-0,53543	2992	-253	5293695	0,02542	-5,32726	-8,88008	2992	1,004	803	1,014	0,00	0,990	476,4	1,010	1,01	0,991	0,00	4,12	0,0000363		
	0,03	1,383866	-0,53543	2992	-253	5291556	0,02542	-5,32726	-8,88008	2992	1,004	803	1,014	0,00	0,990	476,4	1,010	1,01	0,991	0,00	4,12	0,0000364		
	0,035	1,381188	-0,53468	2991	-253	5291556	0,02542	-5,32918	-8,87738	2991	1,005	804	1,016	0,00	0,989	475,7	1,011	1,01	0,989	0,00	4,80	0,0000364		
	0,035	1,381192	-0,53468	2991	-253	5289425	0,02542	-5,32917	-8,87739	2991	1,005	804	1,016	0,00	0,989	475,7	1,011	1,01	0,989	0,00	4,80	0,0000364		
4	0,04	1,378519	-0,53394	2990	-253	5289430	0,02542	-5,3313	-8,87484	2990	1,005	804	1,018	0,00	0,987	474,9	1,013	1,01	0,988	0,00	5,47	0,0000364		
	0,04	1,378519	-0,53394	2990	-253	5287309	0,02542	-5,3313	-8,87484	2990	1,005	804	1,018	0,00	0,987	474,9	1,013	1,01	0,988	0,00	5,47	0,0000364		
	0,045	1,375849	-0,53323	2989	-253	5287309	0,02542	-5,33366	-8,87244	2989	1,006	805	1,021	0,00	0,986	474,1	1,015	1,01	0,987	0,00	6,15	0,0000364		
	0,045	1,375853	-0,53323	2989	-253	5285196	0,02542	-5,33365	-8,87244	2989	1,006	805	1,021	0,00	0,986	474,1	1,015	1,01	0,987	0,00	6,15	0,0000364		
	0,05	1,373186	-0,53254	2987	-253	5285201	0,02542	-5,33623	-8,87019	2987	1,007	805	1,023	0,00	0,984	473,4	1,016	1,02	0,985	0,00	6,82	0,0000364		
5	0,05	1,373186	-0,53254	2987	-253	5283096	0,02542	-5,33623	-8,87019	2987	1,007	805	1,023	0,00	0,984	473,4	1,016	1,02	0,985	0,00	6,82	0,0000364		
	0,055	1,370524	-0,53186	2986	-252	5283096	0,02542	-5,33904	-8,8681	2986	1,007	806	1,025	0,00	0,982	472,6	1,018	1,02	0,984	0,00	7,49	0,0000364		
	0,055	1,370527	-0,53187	2986	-252	5281000	0,02542	-5,33904	-8,8681	2986	1,007	806	1,025	0,00	0,982	472,6	1,018	1,02	0,984	0,00	7,48	0,0000364		
	0,06	1,367868	-0,53121	2985	-252	5281004	0,02542	-5,34207	-8,86615	2985	1,008	806	1,027	0,00	0,981	471,8	1,020	1,02	0,982	0,00	8,15	0,0000364		

Figura 14 - Exemplo do cálculo das propriedades para um caso de temperatura de parede constante

Fluxo de Calor Constante																								
n	x	M	M'	To	dtu/dx	Reynolds	f	Ft	Fi	Dado T2		Dado p1		Dado V1		Dado p1		Dado p1		p02	Δs	μ		
										T02	T2/T1	T2	p2/p1	p2	V2/V1	V2	p2/p1	p2	p02/p01					
0	0	1,4	-2,12582	3000	-1000	5304513	0,02542	-5,32022	-8,89922	3000	1,000	800	1,000	0,00	1,000	481,0	1,000	1,00	1,000	0,00	0,00	0,0000363		
	0,005	1,389371	-2,11816	2995	-1000	5304513	0,02542	-5,32401	-8,88606	2995	1,003	802	1,009	0,00	0,994	478,0	1,006	1,01	0,994	0,00	2,72	0,0000363		
	0,005	1,389409	-2,11821	2995	-1000	5295943	0,02542	-5,32399	-8,8861	2995	1,003	802	1,009	0,00	0,994	478,0	1,006	1,01	0,994	0,00	2,71	0,0000363		
	0,01	1,378818	-2,11163	2990	-1000	5295993	0,02542	-5,33105	-8,87512	2990	1,005	804	1,018	0,00	0,987	475,0	1,013	1,01	0,988	0,00	5,40	0,0000363		
	0,01	1,378816	-2,11163	2990	-1000	5287547	0,02542	-5,33106	-8,87512	2990	1,005	804	1,018	0,00	0,987	475,0	1,013	1,01	0,988	0,00	5,40	0,0000364		
1	0,015	1,368258	-2,10616	2985	-1000	5287545	0,02542	-5,34161	-8,86643	2985	1,008	806	1,027	0,00	0,981	471,9	1,019	1,02	0,982	0,00	8,05	0,0000364		
	0,015	1,368286	-2,10619	2985	-1000	5279215	0,02542	-5,34158	-8,86645	2985	1,008	806	1,027	0,00	0,981	472,0	1,019	1,02	0,982	0,00	8,04	0,0000364		
	0,02	1,357754	-2,1019	2980	-1000	5279251	0,02542	-5,35585	-8,86018	2980	1,010	808	1,036	0,00	0,975	468,9	1,026	1,03	0,977	0,00	10,67	0,0000364		
	0,02	1,357753	-2,1019	2980	-1000	5271031	0,02542	-5,35586	-8,86018	2980	1,010	808	1,036	0,00	0,975	468,9	1,026	1,03	0,977	0,00	10,67	0,0000365		
	0,025	1,347243	-2,09886	2975	-1000	5271029	0,02542	-5,37412	-8,85647	2975	1,013	810	1,046	0,00	0,968	465,9	1,033	1,03	0,972	0,00	13,27	0,0000365		
2	0,025	1,347238	-2,09888	2975	-1000	5262911	0,02542	-5,37409	-8,85648	2975	1,013	810	1,046	0,00	0,968	465,9	1,033	1,03	0,972	0,00	13,26	0,0000366		
	0,03	1,336764	-2,09716	2970	-1000	5262930	0,02542	-5,39664	-8,8555	2970	1,015	812	1,055	0,00	0,962	462,8	1,039	1,04	0,966	0,00	15,83	0,0000366		
	0,03	1,336762	-2,09716	2970	-1000	5254906	0,02542	-5,39665	-8,8555	2970	1,015	812	1,055	0,00	0,962	462,8	1,039	1,04	0,966	0,00	15,83	0,0000366		
	0,035	1,326276	-2,09686	2965	-1000	5254903	0,02542	-5,42386	-8,85745	2965	1,018	814	1,065	0,00	0,956	459,7	1,046	1,05	0,961	0,00	18,38	0,0000366		
	0,035	1,326277	-2,09686	2965	-1000	5246965	0,02542	-5,42385	-8,85745	2965	1,018	814	1,065	0,00	0,956	459,7	1,046	1,05	0,961	0,00	18,38	0,0000367		
4	0,04	1,315793	-2,0981	2960	-1000	5246967	0,02542	-5,45614	-8,86256	2960	1,020	816	1,075	0,00	0,949	456,6	1,053	1,05	0,956	0,00	20,91	0,0000367		
	0,04	1,315791	-2,0981	2960	-1000	5239106	0,02542	-5,45615	-8,86257	2960	1,020	816	1,075	0,00	0,949	456,6	1,053	1,05	0,956	0,00	20,91	0,0000367		
	0,045	1,3053	-2,101	2955	-1000	5239102	0,02542	-5,49401	-8,87112	2955	1,023	818	1,085	0,00	0,943	453,6	1,061	1,06	0,951	0,00	23,42	0,0000367		
	0,045	1,305286	-2,101	2955	-1000	5231309	0,02542	-5,49408	-8,87113	2955	1,023	818	1,085	0,00	0,943	453,6	1,061	1,06	0,951	0,00	23,42	0,0000368		
	0,045	1,294781	-2,10572	2950	-1000	5231291	0,02542	-5,53808	-8,88346	2950	1,025	820	1,095	0,00	0,936	450,4	1,068	1,07	0,946	0,00	25,92	0,0000368		
5	0,05	1,294777	-2,10572	2950	-1000	5223555	0,02542	-5,53809	-8,88346	2950	1,025	820	1,095	0,00	0,936	450,4	1,068	1,07	0,946	0,00	25,92	0,0000368		
	0,055	1,284249	-2,11245	2945	-1000	5223552	0,02542	-5,58895	-8,89994	2945	1,028	822	1,105	0,00	0,930	447,3	1,075	1,08	0,942	0,00	28,40	0,0000368		
	0,055	1,284215	-2,11245	2945	-1000	5215864	0,02542	-5,58913	-8,9	2945	1,028	822	1,105	0,00	0,930	447,3	1,075	1,08	0,942	0,00	28,41	0,0000368		
	0,06	1,273653	-2,12141	2940	-1000	5215822	0,02542	-5,64767	-9,21212	2940	1,030	824	1,116	0,00	0,923	444,1	1,083	1,08	0,937	0,00	30,89	0,0000369		

9.3 Gráficos

Na aba dos gráficos teremos uma série de gráficos plotados mostrando os resultados obtidos pela planilha.

Teremos duas colunas de gráficos para cada caso, uma com os gráficos de todas as relações de propriedades obtidas e outra com os gráficos dos valores das propriedades em si ao longo do duto. Alguns gráficos desta segunda coluna só serão preenchidos caso o usuário tenha entrado com os dados opcionais na aba de entradas.

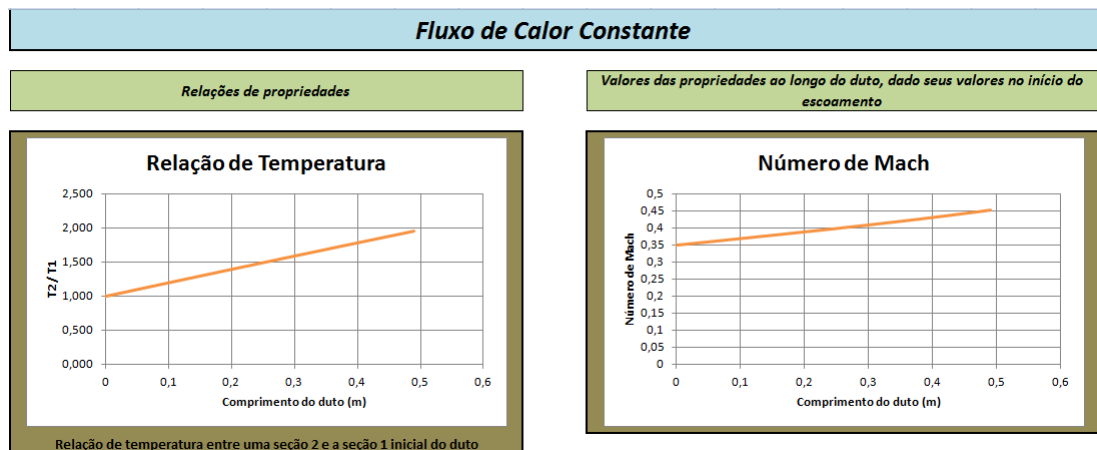


Figura 16 - Exemplo de gráficos plotados para um caso de fluxo de calor constante

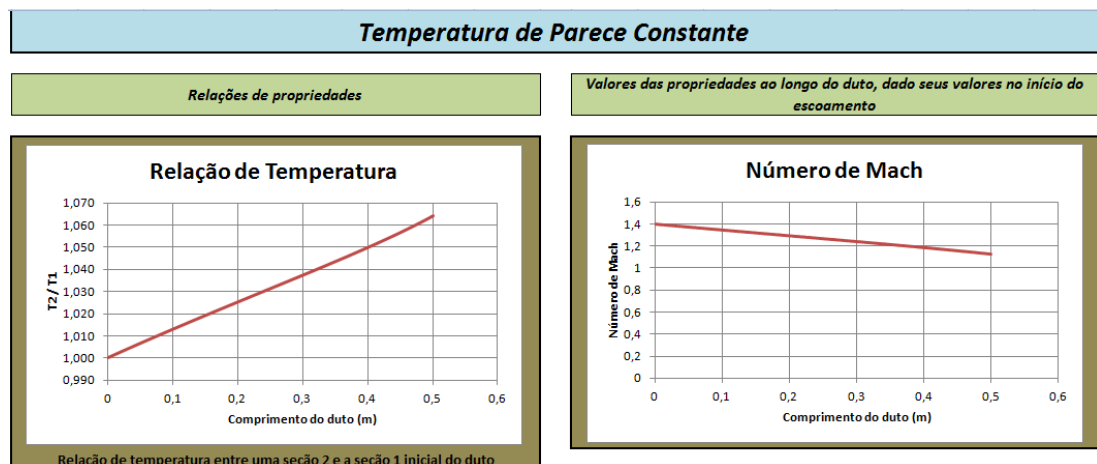


Figura 17 - Exemplo de gráficos plotados para um caso de temperatura de parede constante

10 EXEMPLOS

Serão executados alguns exemplos para que se possa exibir o funcionamento da planilha.

10.1 Caso com temperatura de parede constante

Primeiramente será executado um teste para o caso de temperatura de parede constante. Os dados de entrada ficaram da seguinte forma:

Dados de Entrada			
Integração			
Passo dx	0,01		
Nº de integrações	100		
Recomenda-se número de integrações mínimo igual a 100			
Preenchimento obrigatório			
Preenchimento opcional			
Preenchimento automático			
Calcular			
Dados do escoamento			
Mach inicial	M	0,6	-
Diâmetro do duto	D	0,2	m
Rugosidade do duto	ε/D	0,005	-
Temperatura de estagnação inicial	T01	858	K
Temperatura de parede inicial	Tp1	3000	K
Índice adiabático do fluido	k	1,4	-
Comprimento do duto	L	1	m
Temperatura inicial	T1	800	K
Massa específica inicial	ρ_1	1,00	kg/m³
Velocidade inicial	V1	206,2	m/s
Pressão de estagnação inicial	p01		kg/m³
Pressão inicial	p1		kPa
Calor específico	Cp	1076,00	J/(kg.K)

Figura 18 - Dados de entrada do exemplo

Olhando os dados, podemos perceber que o fluido de trabalho é o ar, sofrendo um acréscimo de calor (temperatura de parede maior que a temperatura de estagnação) escoando com Mach igual a 0,6 (veja que a velocidade inicial é calculada automaticamente) em um duto com 20cm de diâmetro e 1m de comprimento.

Apertou-se o botão calcular, para realizar as 100 integrações estipuladas, e pode-se analisar os gráficos plotados:

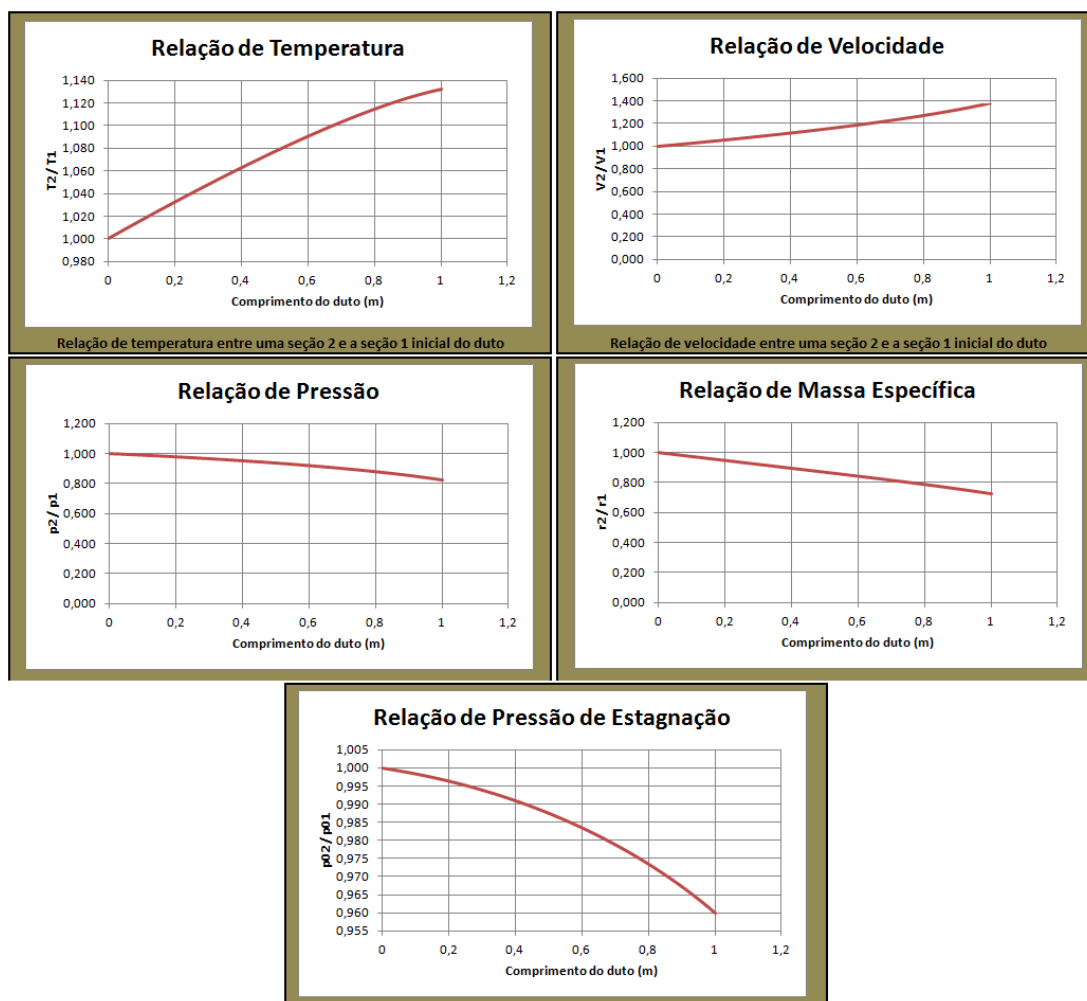


Figura 19 - Gráficos das relações das propriedades

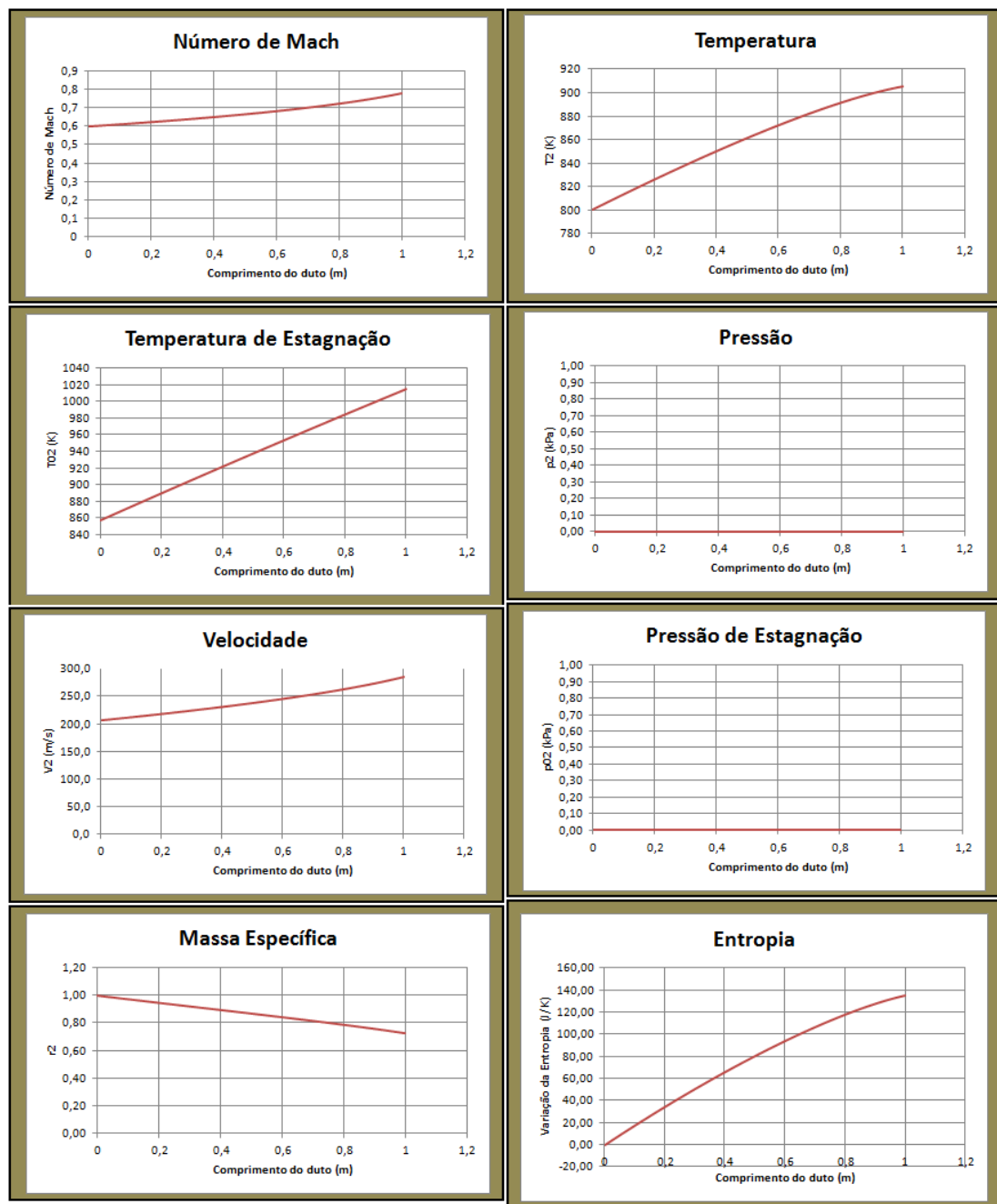


Figura 20 - Gráficos do valor das propriedades ao longo do escoamento

Repara-se que a temperatura de estagnação cresce durante o escoamento, uma vez que está sendo adicionado calor ao escoamento.

Pode-se observar também que os gráficos da pressão e da estagnação não possuem curva nenhuma, pois seus campos opcionais na aba de entradas não foram preenchidos. Já o calor específico, que também era opcional, foi preenchido, gerando a curva da variação de entropia.

10.2 Caso com fluxo de calor constante

Agora faz-se um exemplo com caso de fluxo de calor constante, ou seja, onde a diferença entre a temperatura de parede e a temperatura de estagnação é constante.

Entra-se com os dados de entrada:

Dados de Entrada

Integração	
Passo dx	0,01
Nº de integrações	180

Recomenda-se número de integrações mínimo igual a 100

Preenchimento obrigatório

Preenchimento opcional

Preenchimento automático

Calcular

Dados do escoamento			
Mach inicial	M	1,8	-
Diâmetro do duto	D	0,2	m
Rugosidade do duto	ε/D	0,005	-
Temperatura de estagnação inicial	T01	1648	K
Temperatura de parede inicial	Tp1	1200	K
Índice adiabático do fluido	k	1,4	-
Comprimento do duto	L	1,8	m
Temperatura inicial	T1	1000	K
Massa específica inicial	ρ_1	1,00	kg/m³
Velocidade inicial	V1	618,5	m/s
Pressão de estagnação inicial	p01		kPa
Pressão inicial	p1	2,00	kPa
Calor específico	Cp		J/(kg.K)

Figura 21 - Dados de entrada do exemplo

Analisando os dados de entrada, percebe-se que o fluido de trabalho pode ser o ar, escoando com Mach igual a 1,8, perdendo calor para um duto de 20cm de diâmetro e comprimento 1,8m.

Pelo passo estipulado, foram feitas 180 integrações, gerando os gráficos:

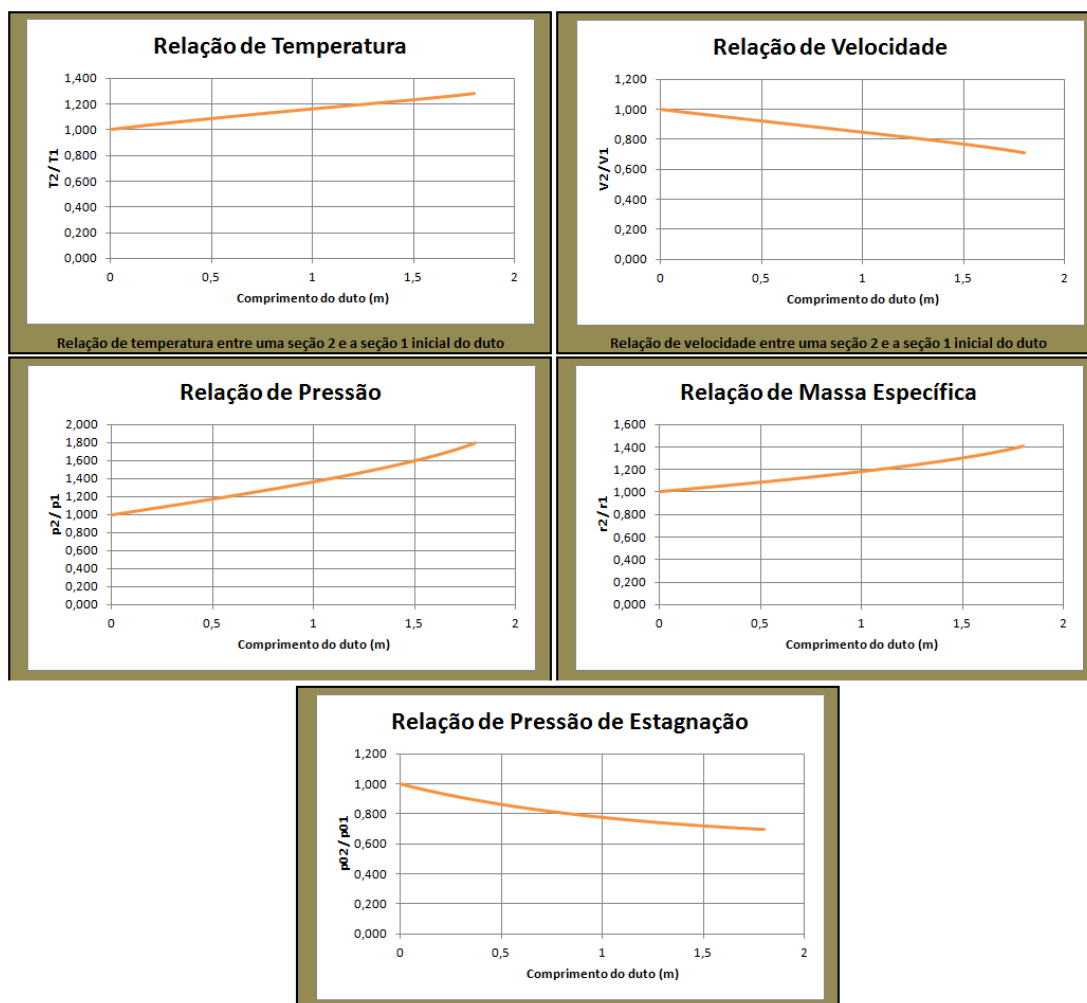


Figura 22 - Gráficos das relações das propriedades

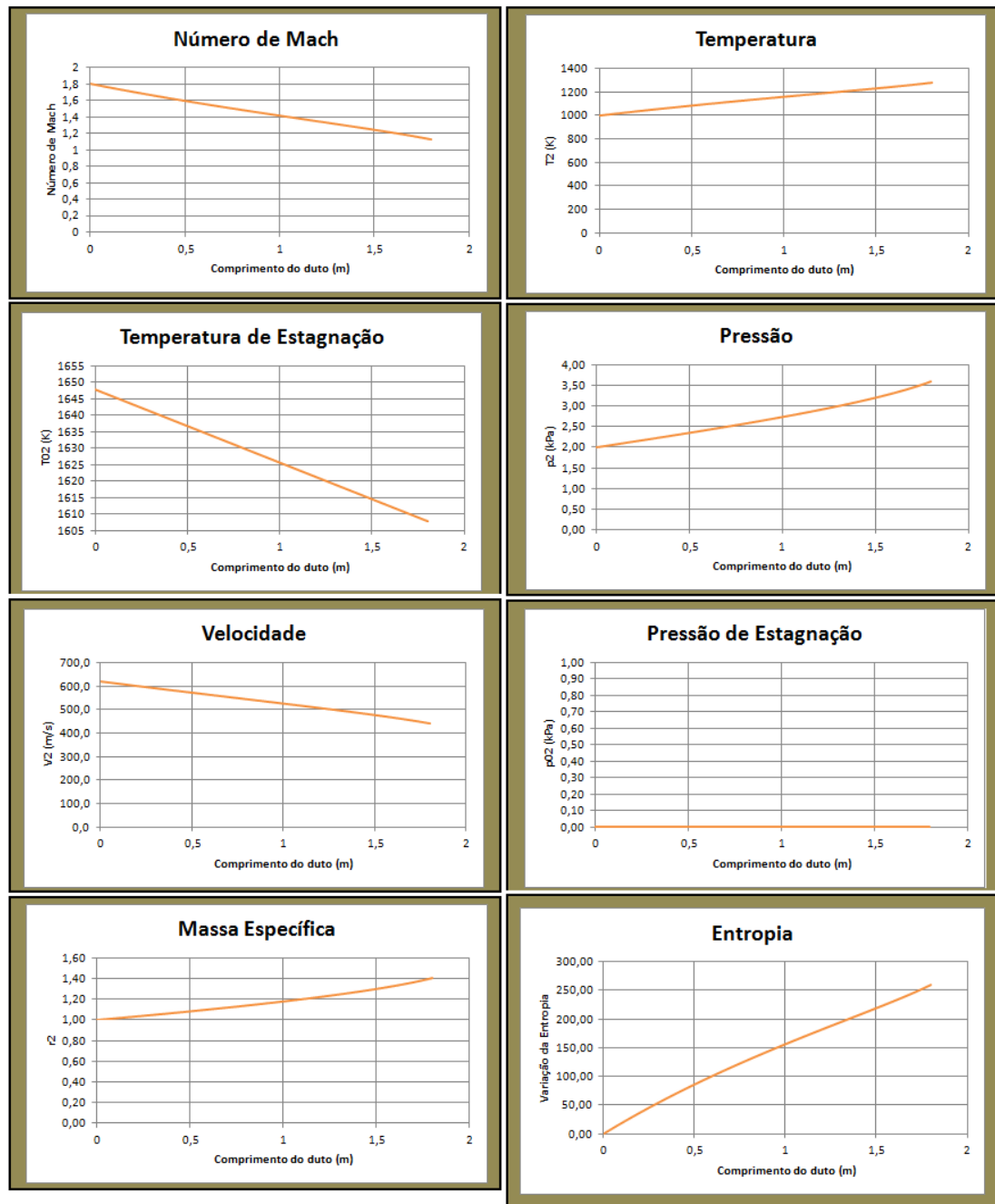


Figura 23 - Gráficos do valor das propriedades ao longo do escoamento

Pode-se observar desta vez que a temperatura de estagnação diminui, pois o fluido está perdendo calor para o duto.

Vê-se também que o campo da pressão inicial foi preenchido nas entradas, por isso o gráfico da pressão gerou uma curva. Já o gráfico da pressão de estagnação continua vazio.

10.3 Caso onde Mach atinge a unidade

Este exemplo visa mostrar um caso onde o Mach atinge a unidade. Neste caso em específico, o fluido começará com Mach menor que 1 e depois atingirá a unidade. Lembrando que sempre que Mach atinge 1, ele tende a estabilizar, uma vez que para continuar variando, seria preciso que se alterassem as condições do escoamento; fato foge do escopo deste projeto.

Sendo os dados de entrada:

Dados de Entrada			
Integração			
Passo dx		0,01	
Nº de integrações		500	
Recomenda-se número de integrações mínimo igual a 100			
Preenchimento obrigatório			
Preenchimento opcional			
Preenchimento automático			
Calcular			
Dados do escoamento			
Mach inicial	M	0,7	-
Diâmetro do duto	D	0,3	m
Rugosidade do duto	ϵ/D	0,005	-
Temperatura de estagnação inicial	T ₀₁	1098	K
Temperatura de parede inicial	T _{p1}	1200	K
Índice adiabático do fluido	k	1,4	-
Comprimento do duto	L	5	m
Temperatura inicial	T ₁	1000	K
Massa específica inicial	ρ_1	1,00	kg/m³
Velocidade inicial	V ₁	240,5	m/s
Pressão de estagnação inicial	p ₀₁		kPa
Pressão inicial	p ₁	1,00	kPa
Calor específico	C _p	1076,00	J/(kg.K)

Figura 24 - Dados de entrada do exemplo

Têm-se o gráfico da variação do número de Mach:

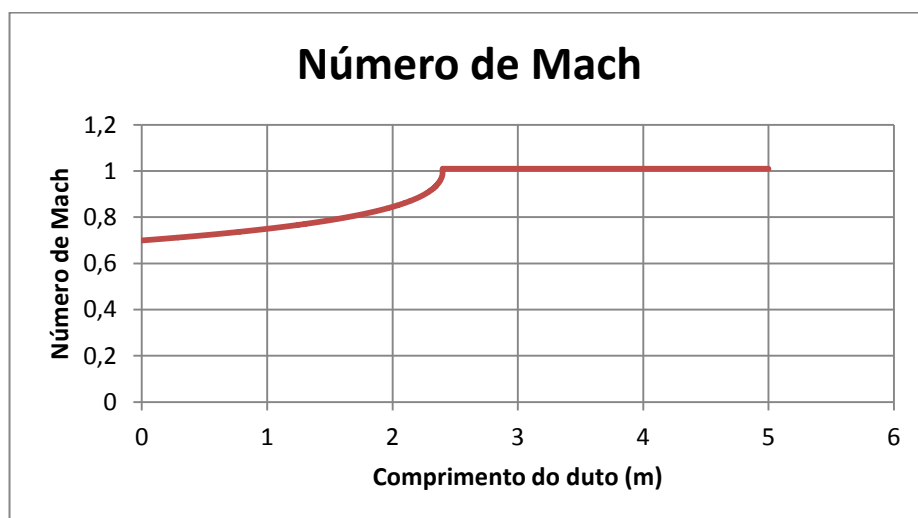


Figura 25 - Variação do número de Mach

Pode-se observar que por volta de uma distância de 2,5m do início do duto, o fluido bloqueia, atingindo o Mach igual a 1. Para que se continuasse a aumentar este valor, o escoamento precisaria sofrer alterações em suas condições. Como neste projeto, as condições de contorno do escoamento não mudam ao longo dele, o Mach continuará igual a unidade até o fim do escoamento.

Porém, a troca de calor continuará, como pode-se observar no gráfico abaixo:

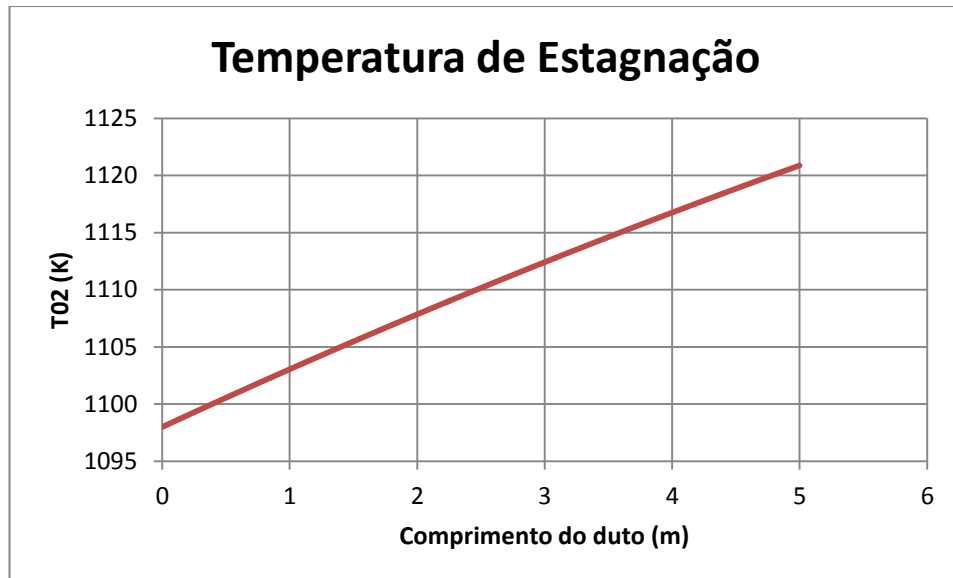


Figura 26 - Variação da temperatura de estagnação

E sendo assim, algumas propriedades continuarão variando, como por exemplo a temperatura, entropia:

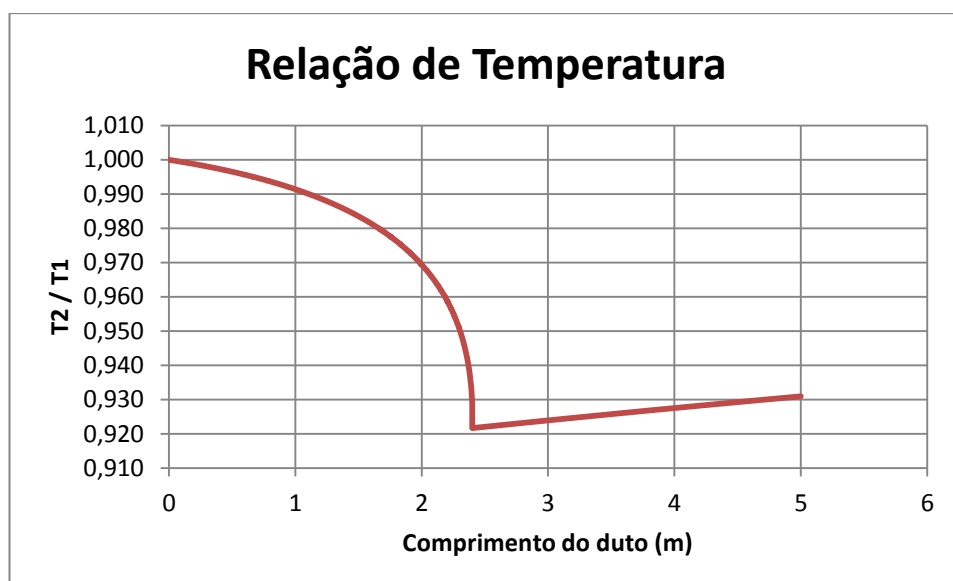


Figura 27 - Variação da temperatura

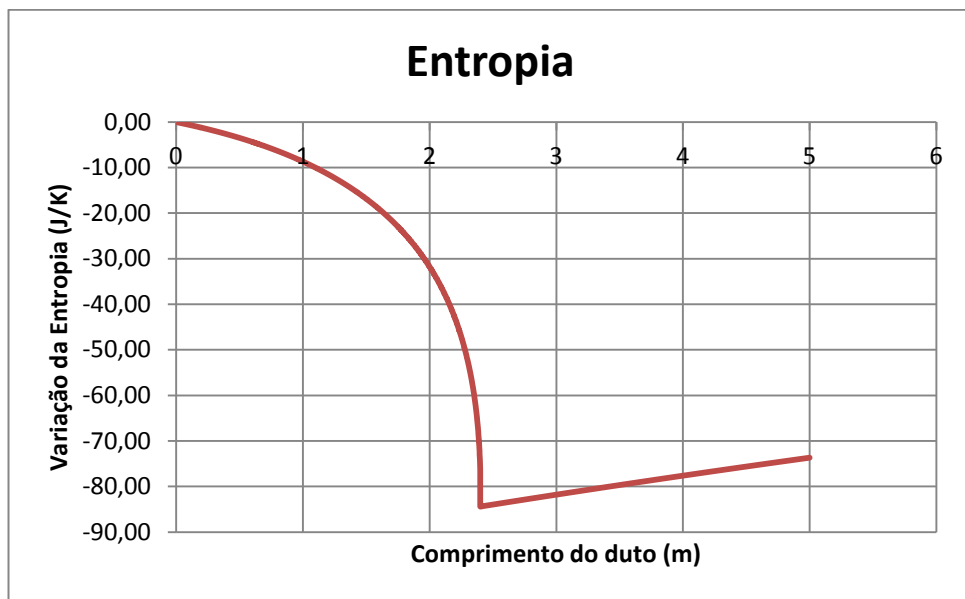


Figura 28 - Variação da entropia

11 CONCLUSÕES

Escolheu-se o tema dentro do escopo dos Escoamentos Generalizados, que trata de escoamentos em dutos que envolvem diversos tipos de variações combinadas, como variação da seção transversal do duto, adição de massa, troca de calor, atrito.

Dentro de todas estas variações foram analisadas apenas duas neste Projeto Integrado, troca de calor e atrito dentro da tubulação. Foi feita uma análise em cima do equacionamento de um trocador de calor com atrito e pôde-se chegar a equações úteis para a resolução de problemas, priorizando dois casos específicos deste tipo de escoamento:

- caso onde a temperatura da parede do duto é constante durante todo o escoamento;
- caso onde a o fluxo de calor para o fluido é constante durante todo o escoamento. Esta condição implica em tornar constante a diferença entre a temperatura de parede do duto e a temperatura de estagnação do fluido em cada seção do escoamento.

Os problemas consistem basicamente em fornecer todas as informações de uma seção 1 do duto, incluindo como variam os potenciais. A partir destes dados, inseridos na tabela, poderão ser achadas quaisquer propriedades em uma seção 2, mais adiante de 1.

Para tornar a planilha uma ferramenta ainda mais poderosa, também foi considerado que o atrito ao longo da tubulação fosse variável, dependendo do número de Reynolds e da temperatura em cada seção.

A partir deste ponto, escolheu-se um método de resolução simples de equações diferenciais para que fosse possível sua implementação em uma planilha. O método selecionado foi o Runge-Kutta de ordem 4, método simples, prático e muito usado na literatura para tal propósito.

Em cima de uma equação diferencial básica, pôde-se implementar o método no software Microsoft Excel 2007. A planilha foi montada, usando-se abas simples de entradas, cálculos, e saídas/gráficos. Poucas “macros” foram usadas, focando sempre no método de inserção de fórmulas nas células.

Após a conclusão da planilha com inúmeros testes, pôde-se executar alguns exemplos, se mostrando satisfatórios e evidenciando que o método de integração inserido funciona, chegando-se as variações de todas as propriedades do fluido ao longo de todo o escoamento.

Por fim, com uma interface simples e de fácil uso, pôde-se criar uma ferramenta poderosa para a solução de problemas de escoamentos com troca de calor e atrito.

ANEXO A – Tabela de Coeficientes de Influência

$$(\psi = 1 + \frac{k-1}{2} M^2)$$

Variáveis Dependentes

Variáveis Independentes

	$\frac{dA}{A}$	$\left[\left(\frac{4f dx}{D} \right) + \frac{2\delta d}{kM^2 pA} \right]$	$\frac{dT_0}{T_0}$	$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$
$\frac{dM}{M}$	$-\frac{\psi}{1-M^2}$	$\frac{kM^2\psi}{2(1-M^2)}$	$\frac{(1+kM^2)\psi}{2(1-M^2)}$	$\frac{\psi[(1+kM^2)-y kM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{kM^2}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2[1+(k-1)M^2]}{2(1-M^2)}$	$-\frac{kM^2\psi}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2[2\psi(1-y)+y]}{1-M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2}{2(1-M^2)}$	$-\frac{\psi}{1-M^2}$	$-\frac{[(k+1)M^2-kyM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(k-1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{k(k-1)M^4}{2(1-M^2)}$	$\frac{\psi(1-kM^2)}{1-M^2}$	$-\frac{(k-1)M^2[(1+kM^2)-kyM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dV}{V}$	$-\frac{1}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2}{2(1-M^2)}$	$\frac{\psi}{1-M^2}$	$\frac{[(1+kM^2)-y kM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dp_0}{p_0}$	0	$\frac{-kM^2}{2}$	$\frac{-kM^2}{2}$	$-kM^2(1-y)$
$\frac{dF}{F}$	$\frac{1}{1+kM^2}$	$-\frac{kM^2}{1+kM^2}$	0	$\frac{y kM^2}{1+kM^2}$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$\frac{(k-1)M^2}{2}$	ψ	$(k-1)M^2(1-y)$

ANEXO B – Programa VBA usado na planilha

Sub calcular()

'''sub para copiar as formulas

Dim passo As Long

Dim NumLinhasBloco As Integer

Dim PlanCalculo As String

Dim j As Integer

Dim RangeBloco As String

'''Recebe as informacoes

passo = Worksheets("Entradas").Range("D7")

NumLinhasBloco = 4

PlanCalculo = "Cálculos"

RangeBloco = "C10:AY13"

j = NumLinhasBloco

Sheets(PlanCalculo).Activate

'''Laco

For i = 10 To (passo * NumLinhasBloco + 6)

 If j = NumLinhasBloco Then

 Sheets(PlanCalculo).Cells(i, 2) = ((i - 6) / NumLinhasBloco)

'''Copia o Bloco que vai se repetir

 Range(RangeBloco).Select

 Selection.Copy

 Sheets(PlanCalculo).Cells(i, 3).Select

 ActiveSheet.Paste

 j = 1

 Else

 j = j + 1

End If

Next i

///Limpa o resta da planilha

Sheets(PlanCalculo).Range("A" & (passo * NumLinhasBloco + 7) &
":DZ10000").ClearContents

Application.CalculateFull

Sheets("Gráficos").Activate

AtualizaGrafico "Gráfico 1", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "D"

AtualizaGrafico "Gráfico 2", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "N"

AtualizaGrafico "Gráfico 3", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "M"

AtualizaGrafico "Gráfico 5", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "P"

AtualizaGrafico "Gráfico 6", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "R"

AtualizaGrafico "Gráfico 7", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "T"

AtualizaGrafico "Gráfico 8", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "V"

AtualizaGrafico "Gráfico 9", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "O"

AtualizaGrafico "Gráfico 10", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "Q"

AtualizaGrafico "Gráfico 11", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "S"

AtualizaGrafico "Gráfico 12", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "U"

AtualizaGrafico "Gráfico 13", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "W"

AtualizaGrafico "Gráfico 14", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AM"

AtualizaGrafico "Gráfico 15", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AO"

AtualizaGrafico "Gráfico 16", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AQ"

AtualizaGrafico "Gráfico 17", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AS"

AtualizaGrafico "Gráfico 18", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AU"

AtualizaGrafico "Gráfico 19", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AC"

AtualizaGrafico "Gráfico 20", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AL"

AtualizaGrafico "Gráfico 22", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AN"

AtualizaGrafico "Gráfico 23", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AP"

AtualizaGrafico "Gráfico 25", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AT"

```
AtualizaGrafico "Gráfico 26", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AV"  
AtualizaGrafico "Gráfico 28", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "X"  
AtualizaGrafico "Gráfico 24", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AR"  
AtualizaGrafico "Gráfico 29", "Cálculos", (passo * NumLinhasBloco + 6), "AW"
```

```
End Sub
```

```
Sub AtualizaGrafico(NomeGrafico As String, PlanilhaOrigem As String, RangeFinal  
As Long, ColunaY As String)
```

```
'///Atualiza os graficos conforme o novo range de celulas
```

```
    ActiveSheet.ChartObjects(NomeGrafico).Activate  
    ActiveChart.SeriesCollection(1).XValues = "=" & PlanilhaOrigem &  
"!$C$6:$C$" & RangeFinal  
    ActiveChart.SeriesCollection(1).Values = "=" & PlanilhaOrigem & "!" &  
ColunaY & "$6:$" & ColunaY & "$" & RangeFinal
```

```
End Sub
```

```
Sub testegrafico()
```

```
    Sheets("Gráficos").Activate  
    AtualizaGrafico "Gráfico 1", "Cálculos", 326, "D"
```

```
End Sub
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] <http://www.mr-ideahamster.com/excel_sheets/oderk4.htm>. Acessado em 7, 8, 9 e 10 de abril de 2011.

- [2] HODGE, B. K., **Compressible Fluid Dynamics with Personal Computer Applications**, Ed. Prentice Hall.

- [3] MUNSON, B.R., YOUNG, D. F., OKIISHI, T.H., **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**, 1ª edição, Ed. Blucher, São Paulo, 2004.

- [4] OOSTHUIZEN, P. H., CARSCALLEN, W. E., **Compressible Fluid Flow**, 1st edition, Ed. McGraw-Hill, 1997.

- [5] PIMENTA, M. M., **Introdução à dinâmica dos gases. PMC – Termodinâmica do escoamento compressível.**

- [6] SHAPIRO, A. H., **The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow**, vol.1, New York, Ronald Press, 1953.